

## Feina d'estiu per als alumnes que han de cursar Matemàtiques II al batxillerat.

**Instruccions:** Realitzau en un quadern (pot ser el mateix que fareu servir per l'assignatura durant el proper curs) les activitats proposades en aquest dossier. Aquesta feina es presentarà al professor del proper curs durant els primers dies de classe. La realització correcta d'aquesta tasca serà valorada com una nota de la primera avaluació.

**Ajuda:** Si necessitau ajuda podeu consultar els apunts o el llibre de text Matemàtiques I i els recursos penjats a <https://piworld.es>.

### 1 Sistemes lineals

#### 1. Resoleu aquests sistemes pel mètode de Gauss

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

#### 2. Classifiqueu en (S.C.D, S.C.I, S.I) i resoleu, quan sigui possible, aquests sistemes pel mètode de Gauss

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x + 22y + 17z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$$

- Una prova tipus test consta de 30 preguntes. Cada pregunta ben contestada suma 5 punts, cadascuna mal contestada resta 2 punts i les deixades en blanc no penalitzen. Si l'alumne hagués deixat en blanc 3 preguntes mal contestades, tindria igual nombre de cada tipus. Si sabem que l'alumne va obtenir 72 punts a la prova, quantes preguntes be, malament i en blanc va contestar?
- Tres germans, na Maria, en Joan i en Pere, decideixen regalar un ram de flors de 18.75 euros a la seva mare pel seu aniversari. Reuneixen aquesta quantitat de forma que na Maria aporta la meitat del que aporten els altres dos plegats i en Joan aporta 3 euros per cada 2 que n'aporta en Pere. Quina quantitat aporta cada un dels germans?
- Es tenen 1385 € en bitllets de 5, 20 i 100 €. El nombre de bitllets de 5 € excedeix en 7 unitats el nombre de bitllets de 100 €. Per cada 2 bitllets de 100 € se'n tenen 3 de 20 €. Quants de bitllets hi ha de cada valor?

## 2 Derivades

6. Calculeu i simplifiqueu les derivades primeres de les següents funcions

$$a) y = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

$$b) y = x \cdot e^{x^2}$$

$$c) y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}}$$

$$d) y = x \cdot \sqrt{4 + 5x^2}$$

$$e) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(5x^2 + \ln x)$$

$$f) y = x^3 \cdot (\operatorname{arctg} x - x)$$

7. Calculeu i simplifiqueu les derivades segones de les següents funcions

$$a) y = \cos(3x^2 + 2x - 1)$$

$$b) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$c) y = x \cdot (e^{-x} + 1)$$

$$d) y = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

## 3 Representació de funcions

8. Feis un estudi complet de les funcions següents (domini, punts de tall, asymptotes, màxims, mínims, etc.) i representeu-les gràficament

$$a) y = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$b) y = -x^4 + 2x^2 + 3$$

$$c) y = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$d) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

$$e) y = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

$$f) y = x^2 \cdot e^x$$

9. Calculeu el punt sobre la recta  $2x + y = 3$  tal que el producte de les seves coordenades sigui màxim.

10. Calculeu l'equació de la recta tangent a  $y = 5x^2 + 3x - 2$  en  $x = -1$ .

11. Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba  $y = x^3 - 6x^2 + 1$  en el seu punt d'inflexió.

12. Trobau els extrems relatius de la funció  $f(x) = \frac{1}{x + 1} + \frac{x}{x + 4}$ .

## 4 Probabilitat elemental

Es tracta que repasseu la probabilitat elemental d'ESO. Entreu a <https://piworld.es> i visualitzeu els vídeos núm. 155, 156, 157 i 158 sobre probabilitat elemental.

13. Utilitzant la regla de Laplace, calcula aquestes probabilitats elementals

a) Treure múltiple de 3 en llançar un dau cúbic.

b) Treure més de 7 en llançar un dau dodecaèdric (12 cares iguals).

c) Treure rei de bastos d'una baralla espanyola de 40 cartes.

- d) Treure un bolígraf vermell d'un estoig que conté 10 bolis negres, 3 de blaus i 2 vermells.
- e) Endevinar la xifra de les desenes d'un nombre de 3 xifres.
- f) Que la suma de les dues darreres xifres del nombre sigui 11.
- g) Treure una fitxa doble en un joc de dominó de 28 fitxes.
- 14.** Es tria a l'atzar un nombre natural a partir de l'1 fins el 50. Definim els successos:  
 $A = \text{"Sortir un número major que 4 i menor que 17"}$   
 $B = \text{"Sortir un quadrat perfecte"}$   
 Calcula les probabilitats  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  i  $P(A \cup B)$ . *Nota: La intersecció  $A \cap B$  significa que passin els dos successos simultàniament. La unió  $A \cup B$  significa que passin almenys un dels dos successos.*
- 15.** Joan, Lluís, Aina i Pere jugaran al parxís. Per veure qui comença el joc, cadascun d'ells tira un dau. Si Joan ha tret un 5, Lluís un 3 i Aina un 4, troba la probabilitat que en Pere obtingui un resultat:  
 a) Diferent al dels altres.      b) Superior a tots.      c) Inferior a tots.
- 16.** Llançam un moneda 3 vegades. Calcula la probabilitat: a) Treure 3 cares. b) Treure 2 cares. *Ajuda: Dibuixa un diagrama d'arbre.*
- 17.** Tenim una urna que conté 3 bolles blanques i 7 bolles negres. Treim dues bolles amb reemplaçament, calcula la probabilitat:  
 a) d'obtenir almenys 1 bolla blanca      b) d'obtenir bolles d'igual color  
 Repetiu per sense reemplaçament. *Ajuda: Dibuixa un diagrama d'arbre.*
- 18.** Posam les lletres de la paraula LLAPIS en una bossa i en treim dues sense reemplaçament.  
 a) Quina és la probabilitat de treure dues vocals? b) I una vocal i una consonant?
- 19.** Davant d'un examen, un alumne només ha estudiat 15 dels 25 temes. Aquest es realitza extraient a l'atzar dos temes i deixant que l'alumne esculli un dels dos. Trobau la probabilitat que l'alumne hagi estudiat almenys un dels dos temes.

## Solucions

- 1.** a)  $x = 1; y = -2; z = 3$   
 b)  $x = 4; y = 2; z = -3$   
 c)  $x = 1; y = -1; z = 0$   
 d)  $x = 2; y = 1/5; z = -1$
- 2.** a) S.C.D.  $x = 3/2; y = 1/2; z = 2$   
 b) S.I. no té solució.  
 c) S.C.I.  $x = 5 - 5z; y = 2z - 3; z = z$   
 d) S.C.D.  $x = 2; y = 1/2; z = 3/2$   
 e) S.I. no té solució.
- f) S.C.I.  $x = 1 - 3y; y = y; z = 3 - 7y$
- 3.** Be 18, Malament 9, en blanc 3
- 4.** Maria 6,35 €, Joan 7,5 €, Pere 5 €
- 5.** Planteig:  $5x + 20y + 100z = 1385$ ,  $x = 7 + z$ ,  $\frac{z}{2} = \frac{y}{3}$ . Solució:  $x = 17$ ,  $y = 15$ ,  $z = 10$ .
- 6.** a)  $y' = \frac{-1}{x^2 - 4} + \frac{1 - \ln(x + 1)}{(x + 1)^2}$   
 b)  $y' = (1 + 2x^2) \cdot e^{x^2}$

c)  $y' = -\frac{5}{6\sqrt[6]{x^{11}}}$

d)  $y' = \frac{4 + 10x^2}{\sqrt{4 + 5x^2}}$

e)  $y' = \frac{\operatorname{tg}(5x^2 + \ln x)}{\cos^2(5x^2 + \ln x)} \cdot (10x + \frac{1}{x})$

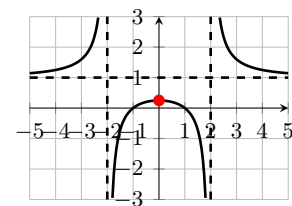
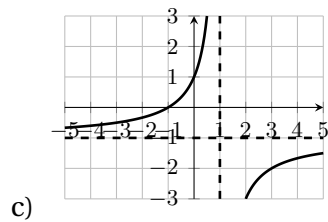
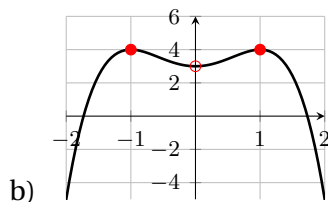
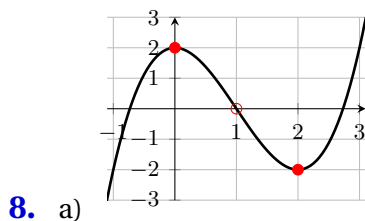
f)  $y' = 3x^2(\operatorname{arctg} x - x) - \frac{x^5}{1 + x^2}$

7. a)  $y' = -(6x + 2) \cdot \sin(3x^2 + 2x - 1)$   
 $y'' = -6 \sin(3x^2 + 2x - 1) - (6x + 2)^2 \cos(3x^2 + 2x - 1)$

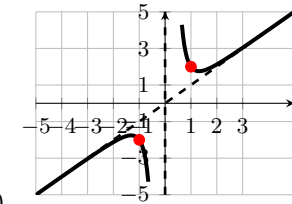
b)  $y' = \frac{x \cdot \cos x + \sin x}{x^2}$   
 $y'' = \frac{-(x^2 + 2) \sin x}{x^3}$

c)  $y' = (1 - x)e^{-x} + 1$   
 $y'' = (x - 2)e^{-x}$

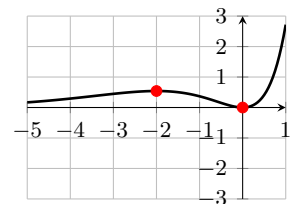
d)  $y' = \frac{-6(x^2 + x)}{(x^2 + x + 1)^3}$   
 $y'' = \frac{24x^3 + 36x^2 - 6}{(x^2 + x + 1)^4}$



d)



e)



f)

9. Cercau el màxim de  $f(x) = x \cdot (3 - 2x)$   
 $x = 3/4, y = 3/2$

10.  $y - 0 = -7(x + 1)$

11. El punt d'inflexió és a  $x = 2, y = -15$ . La recta tangent  $y + 15 = -12(x - 2)$

12. Derivada simplificada  $y' = \frac{3x^2 - 12}{(x + 1)^2(x + 4)^2}$ .  
 Té un màxim a  $x = -2, y = -2$  i un mínim a  $x = 2, y = 2/3$

13. Correcció del professor.

14.  $P(A) = 6/25; P(B) = 7/50; P(A \cap B) = 1/25; P(A \cup B) = 17/50$

15. a)  $P = \frac{3}{6}$ , b)  $P = \frac{1}{6}$ , c)  $P = \frac{2}{6}$

16. Amb reemplaçament: a)  $P = 0,51$ , b)  $P = 0,58$ . Sense: a)  $P = 0,533$ , b)  $P = 0,533$

17. a)  $P = 1/8$ , b)  $P = 3/8$ .

18. a)  $P = 2/30$ , b)  $P = 16/30$ .

19.  $P = 0.85$